CONCOURS EXTERNE 1991 D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

-=-=-=-=-=-=-

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : MATHEMATIQUES (II)

-=-=-=-=-=-=-

DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 6

Les trois problèmes, quoique similaires sont indépendants. Il sera tenu compte dans la notation de la rigueur des raisonnements et de la clarté de la présentation.

- PROBLEME I -

1°) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et l'équation différentielle $u'(x) = a\,u(x)$, $u(o) = 1$ où u est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $u(x)$. On posera $u_n = u(n)$ où $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence de la suite (u_n).

2°) Soit (v_n) une suite réelle vérifiant $v_{n+1} - v_n = a(\theta v_{n+1} + (1-\theta)v_n)$ où $\theta \in [0,1]$ et $v_0 = 1$. Etudier la convergence de (v_n).

3°) Calculer $D = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - v_n)^2$ quand (v_n) est convergente. a étant fixé étudier les variations de D en fonction de θ.

4°) Montrer que D s'annule pour une certaine valeur θ_0 de θ. Etudier les variations de θ_0 en fonction de a.

A SUIVRE

- PROBLEME II -

1°) Soit $b \in \mathbb{R}^*$ et l'équation différentielle $u'(x) = i\,b\,u(x)$, $u(o) = 1$ où u est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer $u(x)$. On pose $u_n = u(n)$ où $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence de la suite (u_n).

2°)Soit (v_n) une suite complexe vérifiant $v_{n+1}-v_n = ib(\theta\, v_{n+1} + (1-\theta)v_n)$ où $\theta \in [0,1]$ et $v_o = 1$. Etudier la convergence de (v_n) . (v_n)est elle bornée ?. Peut-on avoir $v_n = u_n$?.

3°) Soit (w_n) une suite complexe vérifiant :

$$w_{n+1} - w_{n-1} = 2ibw_n \qquad (1)$$

et $w_o = 1$.

Etudier la convergence de (w_n).

(On pourra montrer que les suites vérifiant (1) forment un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est de la forme (s_1^n, s_2^n), ou, dans certains cas $(s^n, n\,s^n)$)

Déterminer en fonction de b si :

a) (w_n) est bornée quel que soit w_1.

b) $w_1 = u_1$ implique $w_n = u_n$ quel que soit n.

4°) Soit x_n une suite complexe vérifiant
$x_{n+1} - x_{n-1} = ib\,(2\theta x_n + (1-\theta)(x_{n+1}+x_{n-1}))$ où $\theta \in]0,1[$ et $x_o = 1$.
b étant fixé, déterminer θ pour que :

a) x_n soit bornée quel que soit x_1.

b) $x_1 = u_1$ implique $x_n = u_n\ \forall n$.

- PROBLEME III -

1°) Soient $b \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}_-^*$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, et l'équation différentielle $u'(x) = z\,u(x)$, $u(o) = 1$, où u est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer $u(x)$. On pose $u_n = u(n)$ où $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence et la suite (u_n).

2°) Soit $A(h) = (\alpha\, u(x+h) + \beta\, u(x) + \gamma u(x-h) - hz(\alpha' u(x+h) + \beta' u(x) + \gamma' u(x-h)))$ où $h \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et γ' sont des constantes réelles non toutes nulles. Déterminer les relations que doivent vérifier $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et γ' pour que $A(h)$ soit un infiniment petit d'ordre 2 quand h tend vers 0.

3°) Quel ordre maximum peut on obtenir pour $A(h)$ en choisissant $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et γ' ?. Donner un équivalent de $A(h)$ quand h tend vers 0.

4°) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et γ' des coefficients réels vérifiant les relations trouvées au 2°). On considère une suite (v_n) vérifiant :

$\alpha\, v_{n+1} + \beta\, v_n + \gamma\, v_{n-1} = z\,(\alpha' v_{n+1} + \beta' v_n + \gamma' v_{n-1})$ et $v_o = 1$.

Montrer qu'il existe au moins une suite complexe (v_n) non nulle. Dans le cas où $z = i - 1$ déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et γ' pour que si $v_1 = u_1$, alors $v_n = u_n\ \forall n$ (on exprimera les 6 coefficients en fonction de $\lambda = \alpha - \gamma$ et $\mu = \alpha' - \gamma'$).